



Oleh
Muhammad Rifki Taufik
NIM.11305144024

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2015

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Penyakit *Tuberculosis* adalah penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium Tuberculosis*. *Tuberculosis* menular dan menyebar melalui udara oleh partikel kecil yang berisi kuman *Tuberculosis* yang disebut “droplet nukleus”. Jika tidak diobati, setiap orang dengan *Tuberculosis* aktif menginfeksi pada rata-rata 10 sampai 15 orang setiap tahun. Mulai tahun 2003 sampai dengan 2011, diperkirakan masih terdapat sekitar 9,5 juta kasus baru *Tuberculosis*, dan sekitar 0,5 juta orang meninggal akibat *Tuberculosis* di dunia. Saat ini, Indonesia berada pada ranking kelima negara dengan beban *Tuberculosis* tertinggi di dunia. Jumlah kematian akibat *Tuberculosis* diperkirakan 61.000 kematian pertahunnya (Setiawan:2012).

Penderita *Tuberculosis* yang tidak mengalami gejala-gejala terinfeksi *Tuberculosis*, meskipun bakteri *Mycobacterium Tuberculosis* sudah dalam tubuh penderita tersebut namun belum aktif disebut dengan penderita *Tuberculosis* laten. Individu *Tuberculosis* laten dapat berubah menjadi individu *Tuberculosis* aktif, dimana perubahannya disebabkan oleh salah satu dari dua faktor yaitu lemahnya sistem kekebalan tubuh individu *Tuberculosis* laten sehingga menyebabkan bakteri di dalam tubuhnya berkembang menjadi bakteri yang aktif yang disebut *Endogenous Reactivation*. Dan individu laten memperoleh infeksi baru karena kembali melakukan kontak langsung dengan individu *Tuberculosis* aktif yang disebut *Exogenous Reinfection*. Hal ini terjadi karena bakteri pada

MODEL PENYEBARAN PENYAKIT *TUBERCULOSIS* TERVAKSINASI DENGAN PENYEBARAN *EXOGENOUS REINFECTION*

Oleh:
Muhammad Rifki Taufik
NIM.11305144024

ABSTRAK

Tuberculosis merupakan penyakit menular mematikan yang penyebarannya melalui udara. Penyebaran penyakit *Tuberculosis* secara *Exogenous Reinfection* dipengaruhi banyak faktor, diantaranya angka kelahiran, laju infeksi, laju kesembuhan, dan lain-lain. Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan model matematika untuk masalah penyebaran penyakit *Tuberculosis* tervaksinasi secara *exogenous reinfection* dan menganalisis kestabilan model penyebaran penyakit *Tuberculosis* tervaksinasi secara *exogenous reinfection*.

Tahapan analisis model penyebaran *Tuberculosis* secara *Exogenous Reinfection* yaitu membentuk model SVEEvIT (*Susceptible-Vaccinated-Exposed-Exposed Vaccinated-Infected-Threated*), dilanjutkan dengan menentukan titik ekuilibrium dan nilai *basic reproduction number*, menganalisa kestabilan disekitar titik ekuilibrium serta melakukan simulasi dengan menggunakan software Maple 15.

Model SVEEvIT pada penyebaran penyakit *Tuberculosis* secara *Exogenous Reinfection* merupakan model yang berbentuk persamaan diferensial nonlinear. Hasil analisa model SVEEvIT tersebut diperoleh 2 titik ekuilibrium yaitu bebas penyakit dan endemik. Selanjutnya, berdasarkan simulasi yang dibentuk dari model SVEEvIT, diperoleh hasil bahwa terjadi perubahan kestabilan dari stabil menjadi tidak stabil pada 3 parameter yang berbeda yaitu laju infeksi 20 ke 21, laju kesembuhan 0.4 ke 0.3 dan angka kelahiran 0.076 ke 0.077.

Kata kunci : *Exogenous Reinfection*, kestabilan, model SVEEvIT, titik ekuilibrium, *Tuberculosis*

vii

penderita *Tuberculosis* laten berkembang pesat dengan adanya kontak tersebut. Akibatnya jika individu terjangkit *Tuberculosis*, maka hal tersebut tidak dapat hanya dilihat sebagai akibat utama dari faktor-faktor yang menyebabkan penyakit *Tuberculosis* tetapi juga kemungkinan terjadinya *exogenous reinfection*. Penyebaran *Exogenous Reinfection* mempunyai banyak faktor dalam mempengaruhi penyebaran penyakit *Tuberculosis*. Mulai dari angka kelahiran, laju infeksi, laju kesembuhan dan lain-lain. Sehingga perlu adanya pembahasan tentang pengaruh penyebaran *Exogenous Reinfection* terhadap penyakit *Tuberculosis*.

Salah satu pendekatan untuk menjelaskan solusi dari permasalahan yang terjadi dalam dunia nyata adalah memodelkan atau merumuskan permasalahan ke dalam bahasa matematika. Model matematika didapatkan dengan menerjemahkan permasalahan ke dalam bahasa matematika, dengan kata lain model matematika yaitu hasil perumusan yang menggambarkan permasalahan yang akan dicari solusinya. Model matematika dapat diterapkan untuk mengetahui penyebaran penyakit *Tuberculosis*, diharapkan model matematika yang diperoleh dapat membantu untuk mencari solusi bagaimana mengatasi penyebaran penyakit *Tuberculosis* yang kompleksitasnya cenderung meningkat.

Carlos Castillo (2004), menjelaskan secara detil tentang cara kerja dinamik dan kontrol *Tuberculosis*. Model matematika yang paling awal pada tahun 1960 membahas pendekatan dinamik *Tuberculosis* dan berfokus pada model prediksi bukan hanya untuk memberikan peringatan melalui sebuah simulasi tetapi juga kehati-hatian analisis dinamik menggunakan pengetahuan

sistem linier, dsb. Persamaan model mencakup keragaman area matematika seperti ODE (*Ordinary Differential Equation*), PDE (*Partial Differential Equations*), sistem persamaan diferensial, dll.

Terdapat beberapa penelitian terdahulu yang mengkaji tentang pemodelan epidemik matematika. Juan Pablo Aparicio dkk (2009), memaparkan tentang kekuatan dan pembatasan penggunaan campuran homogen dan campuran heterogen model epidemik dijelaskan dalam sebuah transmisi dinamik *Tuberculosis*. Fokus pada 3 tipe model, yaitu sebuah model pencampuran homogen dalam insiden normal, sebuah model pencampuran non-homogen dimana menambahkan *household contact* atau kontak rumah tangga, dan model struktur umur. Model diparameterkan menggunakan demografi dan data epidemik serta pola umum yang kemudian dikomparasi.

Susilo Nugroho (2009), membahas tentang pemodelan penyebaran penyakit dengan pengaruh vaksinasi menggunakan model SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*). Terdapat tahap menurunkan ulang model SIR dengan memperhatikan faktor kelahiran dan kematian. Lisa Prihutami (2009), menjelaskan tentang analisis kestabilan dalam model penyebaran *Tuberculosis*. Model penyebaran *Tuberculosis* diselesaikan secara numerik dan disimulasikan. Sylvain Goutelle dkk (2010), berusaha membangun sebuah prototipe model

Infected, Recovered). Kedua penelitian tersebut membahas tentang estimasi penyebaran penyakit menggunakan *Basic Reproduction Number*.

Pada skripsi ini akan membahas mengenai pembentukan dan analisa model matematika terhadap penyebaran virus *Tuberculosis*. Cara pembentukan model berfokus pada penyebaran dengan *Exogenous Reinfection* atau adanya kontak kembali terhadap individu *Tuberculosis* aktif. Dari model yang terbentuk akan dianalisis perilaku solusi disekitar titik ekuilibrium agar dapat dianalisa kestabilan titik ekuilibrium, sehingga dapat diketahui cara mengatasi penyakit *Tuberculosis* ini.

B. Batasan Masalah

Skripsi ini hanya membahas tentang penyebaran Penyakit *Tuberculosis* dengan *Exogenous Reinfection*.

C. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, maka dapat dirumuskan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana model matematika untuk masalah penyebaran penyakit *Tuberculosis* tervaksinasi secara *exogenous reinfection*?
2. Bagaimana analisis kestabilan model penyebaran penyakit *Tuberculosis* tervaksinasi secara *exogenous reinfection*?

D. Tujuan Penelitian

Berdasarkan permasalahan di atas, tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah :

matematika tentang ancaman *Tuberculosis* dengan *rifampin*, berdasarkan pada *pharmacokinetic*, *pharmacodynamic*, dan submodel penyakit. Model dibangun secara kualitatif dan kuantitatif aktifitas bakteri dari observasi rifampin dalam data klinis.

Nainggolan dkk (2012), mengkaji tentang kontrol optimal vaksinasi dari model epidemiologi tipe SIR dengan adanya reinfeksi. Kontrol optimal vaksinasi dilakukan untuk mengetahui efektivitas vaksin pada pencegahan penyebaran suatu penyakit menular. Pada model ini juga ditentukan angka reproduksi dasar, titik ekuilibrium endemik dan nonendemik. Selanjutnya diberikan perhitungan numerik dengan menggunakan program Matlab untuk ilustrasi pengaruh kontrol vaksinasi terhadap kompartemen terinfeksi.

K. Queena Fredlina dkk (2012) membuat sebuah paper tentang Model SIR untuk penyebaran penyakit *Tuberculosis*. Paper tersebut menganalisis titik kestabilan, nilai eigen dan *basic reproduction ratio* (R_0). Kemudian dilakukan simulasi menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 untuk menguji analisis parameter. Dari hasil analisis akan didapat parameter yang paling berpengaruh dalam penyebaran *Tuberculosis* adalah laju penularan dan laju kesembuhan. Dengan demikian penyebaran *Tuberculosis* dapat dikendalikan dari kejadian epidemi dengan membuat $R_0 < 1$ atau menurunkan laju penularan dan meningkatkan laju kesembuhan. Di tahun 2013 terdapat dua penelitian tentang *Tuberculosis*, Ibrahim (2013) membahas dengan Model SVEI (*Susceptible, Vaccinated, Exposed, Infected*) dan Egbetade (2013) membahas menggunakan model SVEEVR (*Susceptible, Vaccinated, Exposed, Exposed Vaccinated*,

1. Menjelaskan model matematika untuk masalah penyebaran penyakit *Tuberculosis* tervaksinasi secara *exogenous reinfection*.
2. Menjelaskan analisis kestabilan model penyebaran penyakit *Tuberculosis* tervaksinasi secara *exogenous reinfection*.

E. Manfaat Penelitian

Manfaat dalam memodelkan penyebaran penyakit *Tuberculosis* antara lain:

1. Bagi Para Peneliti
 - a. Diharapkan dapat menambah kekayaan ilmu matematika terlebih khusus permodelan epidemik penyakit.
 - b. Diharapkan dapat menjadi referensi baru dalam pengembangan ilmu matematika di bidang permodelan epidemik.
2. Bagi Institusi Kesehatan

Memberikan informasi tentang hasil penelitian sehingga dapat digunakan dalam pengambilan kebijakan untuk mengatasi dan menanggulangi penyebaran penyakit *Tuberculosis*.

berupa dermis maupun teorema yang persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial, nilai dan vektor eigen, sistem persamaan diferensial non-linear, linearisasi, titik ekuilibrium, kestabilan, bilangan reproduksi dasar dan permodelan matematika.

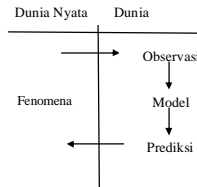
A. Model Penyebaran Penyakit

Definisi 2.1 (Dym, 1980)

Model penyebaran penyakit adalah sebuah representasi miniatur, sebuah pola pembuatan, contoh imitasi atau emulasi, diskripsi atau analogi yang digunakan untuk membantu memvisualisasikan sesuatu (misal: atom) yang tidak dapat diamati secara langsung, sistem dari suatu postulat/dalil, data dan kesimpulan yang disajikan sebagai deskripsi matematis dari suatu entitas atau keadaan.

Definisi 2.2 (Dym, 1980)

Model penyebaran penyakit adalah sebuah representasi dalam terminologi matematika dari kelakuan nyata suatu alat maupun objek.



Gambar 2. 1 Model Dasar Metode Ilmiah (Dym, 1980)

7

yang dilakukan untuk menunjukkan model ini baik atau memvalidasi model atau untuk menunjukkan alasan bahwa model tidak memadai.

Pada poin terakhir menunjukkan bahwa struktur pengulangan terlihat pada Gambar 2.1. Poin ini menunjukkan bahwa permodelan merupakan pusat dari semua fase konseptual. Sehingga model dapat digunakan untuk memprediksi kejadian yang dapat mengkonfirmasi data.

B. Persamaan Diferensial

Definisi 2.3 (Ross, 2010)

Persamaan diferensial adalah sebuah persamaan yang menggunakan turunan dengan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Contoh 2.1

Berikut terdapat beberapa contoh persamaan diferensial :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{d^4u}{dt^4} + 5\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) + 3x = \sin t \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{2.4}$$

Berdasarkan variabel bebasnya , persamaan diferensial yang kemudian disingkat PD dibagi menjadi 2 yaitu Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP).

1. Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Keterangan Gambar 2.1 sebagai berikut:

1. Melalui model dasar dapat mengidentifikasi sebuah “dunia nyata” dan sebuah “dunia konseptual.” Pada dunia luar yang disebut dunia nyata, disini didapat mengamati berbagai macam fenomena dan perilaku. Dunia konseptual adalah dunia pikiran dimana ketika mencoba memahami apa yang sedang terjadi dalam di dunia nyata. Dunia konseptual dapat digambarkan menjadi tiga tahap, yaitu observasi, *modeling* dan prediksi.
2. Pada bagian observasi atau pengamatan, diukur apa yang terjadi dalam dunia nyata. Di sini dikumpulkan bukti empiris dan “fakta di atas tanah.” Pengamatan dapat dilakukan secara langsung maupun secara tidak langsung. Adapun yang dimaksud langsung, yaitu dengan menggunakan indra yang dimiliki sedangkan tidak langsung yaitu pengukuran yang diambil dari referensi penelitian yang sudah pernah ada.
3. Pada bagian *modeling* atau memodelkan difokuskan pada analisis atas pengamatan yang sudah dilakukan. Rasionalisasinya tentang pengembangan: model yang menjelaskan tentang perilaku ataupun hasil dari pengamatan; model yang menjelaskan mengapa didapat perilaku ataupun hasil dari pengamatan seperti itu atau model yang memungkinkan diuntuk mendapatkan prediksi perilaku atau hasil yang akan terjadi pada masa depan yang tidak dapat dilihat dan diukur.
4. Pada bagian prediksi, dicoba model yang sudah didapat untuk menunjukkan apa yang akan terjadi sebagai eksperimen lebih lanjut ataupun sebuah antisipasi pada kejadian di dunia nyata. Prediksi ini berdasarkan pengamatan

8

Definisi 2.4 (Ross, 2010)

Persamaan Diferensial Biasa (PDB) adalah persamaan diferensial yang menggunakan turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Contoh 2.2

Persamaan (2.1) dan Persamaan (2.2) merupakan persamaan diferensial biasa. Variabel x pada Persamaan (2.1) merupakan variabel bebas tunggal dan y merupakan variabel terikat. Pada Persamaan (2.2) variabel bebasnya adalah t dimana x merupakan variabel terikat.

2. Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

Definisi 2.5 (Ross, 2010)

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) adalah persamaan diferensial yang menggunakan turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas.

Contoh 2.3

Persamaan (2.3) dan (2.4) adalah persamaan diferensial parsial. Pada persamaan (2.3) variabel s dan t merupakan variabel bebas dan v merupakan variabel tak bebas. Pada persamaan 2.4 terdapat tiga(3) variabel bebas $x, y,$ dan z , pada persamaan ini u merupakan variabel terikat.

C. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai Eigen digunakan untuk mengetahui kestabilan dari suatu sistem. Nilai eigen didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.6 (Anton, 2010)

dengan skalar λ . Syarat vektor eigen adalah tak nol hal ini ditentukan untuk menghindari perkara tidak penting $A0 = \lambda 0$, dimana berlaku untuk setiap A dan λ .

Persamaan 2.5 dapat ditulis sebagai berikut :

$$Ax = \lambda Ix$$

$$(\lambda I - A)x = 0 \quad (2.6)$$

dengan I : matriks identitas.

Persamaan 2.6 memiliki solusi non trivial jika dan hanya jika

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (2.7)$$

Persamaan 2.7 merupakan persamaan karakteristik dari matriks A dan skalar yang memenuhi persamaan 2.7 adalah nilai eigen dari A .

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_n$$

Sehingga persamaan karakteristik dari A menjadi

$$\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_n = 0$$

dengan $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, \dots, n$

Contoh 2.4

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$. Akan ditentukan nilai eigen dan vektor eigen dari A .

Penyelesaian:

11

$$\begin{cases} -4x_1 + 0x_2 = 0 \\ -8x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 0$$

Sehingga, $x_1 = 0$ dan $x_2 = s$, dimana $s \in \mathbb{R}$, maka vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -1$ adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix}$.

D. Sistem Persamaan Diferensial (Candrawati, 2014)

Diberikan suatu persamaan dimana variabel bebas t ditulis secara implisit sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.8)$$

Persamaan (2.8) merupakan sebuah persamaan vektor yang disebut autonomous. Karakteristik dari penyelesaian persamaan autonomous ada tiga (3) yaitu *equilibrium* atau *stationary solutions*, *periodic solutions*, dan *integral manifolds* (Verhult, 1990). Dalam skripsi ini menggunakan *equilibrium solution*.

Diberikan vektor $x \in \mathbb{R}^n$ dengan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ dan $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$.

Jika notasi $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ untuk menyatakan turunan x terhadap t , maka

$$\dot{x} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)^T \quad (2.9)$$

Diberikan suatu sistem autonomous seperti persamaan (2.8)

Persamaan (2.8) merupakan suatu sistem persamaan diferensial dengan variabel bebas yang implisit dengan $x \in L \subseteq \mathbb{R}^n, f: L \rightarrow \mathbb{R}^n$, L himpunan terbuka dari $f \in C^1(L)$ dengan C^1 merupakan notasi untuk himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan pertama yang kontinu di L . Sistem pada Persamaan (2.10) dapat ditulis sebagai berikut :

13

Akan dicari nilai eigen dari A

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

Jadi, diperoleh nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = -1$. Kemudian akan dicari vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen dari A .

Untuk $\lambda_1 = 3$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 = 0 \\ -8x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

$$-8x_1 + 4x_2 = 0$$

$$8x_1 = 4x_2$$

$$2x_1 = x_2$$

Sehingga, misal $x_1 = t$ maka $x_2 = 2t$, dimana $t \in \mathbb{R}$ maka vektor eigen dari A

yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 3$ adalah $\begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix}$.

Untuk $\lambda_2 = -1$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

12

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \end{bmatrix}$$

atau

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

⋮

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

Sistem Persamaan Diferensial berdasarkan kelinearannya dibagi menjadi dua, yaitu Sistem Linear dan Sistem Non-Linear. Adapun sistem linear dan sistem non-linear adalah sebagai berikut:

1. Sistem Linear

Secara umum sistem persamaan diferensial linear orde satu dengan variabel tak bebas x_1, x_2, \dots, x_n dan variabel bebas t dinyatakan sebagai berikut:

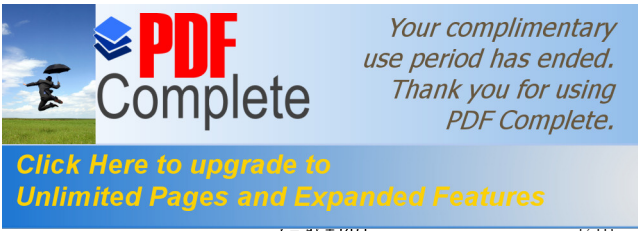
$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + h_1(t) \quad (2.10)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + h_2(t)$$

⋮

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + h_n(t)$$

14



$\dot{x} = Ax + H(t)$ (2.11)

dengan A adalah matriks $n \times n$ yang merupakan matriks koefisien dari variabel tak bebas $x \in \mathbb{R}^n$, dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$, sedangkan $H(t)$ adalah matriks ukuran $n \times 1$ yang merupakan fungsi dari t .

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{bmatrix}$$

Contoh 2.5

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial linear

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases} \quad (2.12)$$

Sistem persamaan diferensial pada Persamaan (2.12) konstantanya bernilai nol, sehingga Persamaan (2.12) merupakan sistem persamaan diferensial linear homogen.

2. Sistem Non-Linear

Definisi 2.7 (Ross, 2010)

- Persamaan diferensial non linear adalah persamaan diferensial biasa yang tak linear.

E. Titik Ekuilibrium

Definisi 2.8 (Wiggins, 2003)

Diberikan sebuah sistem persamaan (2.8) dengan $x \in \mathbb{R}^n$. \bar{x} dengan $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium dari sistem persamaan (2.8) jika memenuhi $f(\bar{x}) = 0$.

Contoh 2.7

Diberikan suatu persamaan sebagai berikut :

$$\dot{x} = x^2 + x - 6$$

Akan ditentukan titik ekuilibrium dari persamaan tersebut.

$$f(\bar{x}) = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

Sehingga didapat dua titik ekuilibrium yaitu $x = 3$ dan $x = -2$

F. Linearisasi

Linearisasi merupakan proses membentuk suatu sistem non linear menjadi sistem linear. Linearisasi dilakukan pada sistem non linear untuk mengetahui perilaku sistem disekitar titik ekuilibrium sistem tersebut. Linearisasi pada sistem non linear dimaksudkan untuk memperoleh aproksimasi yang baik.

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial non linear sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.15)$$

dengan $x \in L \subseteq \mathbb{R}^n, f: L \rightarrow \mathbb{R}^n, f$ fungsi nonlinear dan kontinu. Diberikan pula $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ dan $f \in C^n(L)$. Misalkan $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ adalah titik ekuilibrium dari Persamaan (2.15), maka pendekatan

- Persamaan diferensial dikatakan non linear jika persamaan diferensial tersebut memenuhi paling sedikit satu dari kriteria berikut:

- Memuat variabel tak bebas dari turunan-turunannya berpangkat selain satu
- Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan/atau turunan-turunannya.
- Terdapat fungsi transcendental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

Contoh 2.6

Diberikan sistem persamaan diferensial non linear :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1^2 + 4x_2 \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + \sin x_3 \quad (2.14)$$

Persamaan (2.13) merupakan sistem persamaan diferensial non linear dengan variabel bebas t dan variabel tak bebas x dan y . Persamaan (2.13) dikatakan sistem diferensial nonlinear karena terdapat perkalian antara variabel tak bebas x dan y pada persamaan pertama dan pada persamaan ke dua terdapat kuadrat dari variabel tak bebas x . Sedangkan untuk Persamaan (2.14) merupakan persamaan diferensial non-linear karena terdapat fungsi transcendental.

linear untuk sistem diperoleh dengan menggunakan ekspansi Taylor disekitar titik ekuilibrium $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ yaitu

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)^T &= f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + P_{f_1} \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)^T &= f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + P_{f_2} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + P_{f_n}$$

Pendekatan linear untuk sistem Persamaan (2.16) adalah

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + P_{f_1} \\ \dot{x}_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + P_{f_2} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\dot{x}_n = \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + P_{f_n}$$

dengan $P_{f_1}, P_{f_2}, \dots, P_{f_n}$ merupakan bagian nonlinear yang selanjutnya dapat diabaikan karena nilai $R_{f_1}, R_{f_2}, \dots, R_{f_n}$ mendekati nol. Sehingga sistem Persamaan (2.17) dapat ditulis sebagai matriks seperti berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_n - \bar{x}_n \end{bmatrix}$$

Misalkan $y_1 = x_1 - \bar{x}_1, y_2 = x_2 - \bar{x}_2, \dots, y_n = x_n - \bar{x}_n$, maka diperoleh

dengan

$$J(f(\vec{x})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)^T \end{bmatrix}$$

$J(f(\vec{x}))$ adalah matriks *Jacobian* pada titik ekuilibrium $\vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)^T$. Jika $J(f(\vec{x}))$ tidak memiliki nilai eigen yang bernilai nol pada bagian riilnya, maka sifat kestabilan sistem dapat dilihat dari

$$\dot{\vec{y}} = J(f(\vec{x}))\vec{y} \quad (2.18)$$

Persamaan (2.18) disebut sebagai hasil linearisasi sistem dari Persamaan (2.15). Setelah linearisasi dilakukan pada Persamaan (2.15), perilaku kestabilan sistem nonlinear di sekitar titik ekuilibrium dapat diselidiki melalui perilaku linearisasi di sekitar titik yang sama, jika titik ekuilibrium dari sistem nonlinear tersebut hiperbolik. Berikut diberikan definisi titik ekuilibrium hiperbolik.

Definisi 2.9 (Perko, 2001)

Titik ekuilibrium $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium hiperbolik dari sistem Persamaan (2.15) jika bagian *real* nilai eigen dari $J(f(\vec{x}))$ tidak sama dengan nol.. Jika bagian *real* nilai eigen $J(f(\vec{x}))$ bernilai 0 maka titik ekuilibrium \vec{x} disebut non hiperbolik.

19

Diperoleh dua nilai eigen, yaitu $\lambda = 2 + 2i$ dan $\lambda = 2 - 2i$. Dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $\vec{x}_2 = (-2, -1)^T$ adalah titik ekuilibrium hiperbolik karena tidak terdapat nilai eigen nol dibagian realnya.

Kemudian, Matriks *Jacobian* untuk $\vec{x}_3 = (2, -1)^T$ adalah

$$J(f(2, -1)^T) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Akan dicari nilai eigen untuk $J(f(2, -1))$

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 2 \\ 4 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(4 - \lambda) + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 8 = 0$$

Diperoleh dua nilai eigen, yaitu $\lambda = 2 + 2\sqrt{3}$ dan $\lambda = 2 - 2\sqrt{3}$. Dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $\vec{x}_3 = (2, -1)^T$ adalah titik ekuilibrium hiperbolik karena tidak terdapat nilai eigen nol dibagian realnya.

Selanjutnya, akan diberikan definisi dan teorema kestabilan di sekitar titik ekuilibrium.

G. Kestabilan

Kestabilan titik ekuilibrium dari suatu sistem persamaan diferensial baik linear maupun nonlinear diberikan dalam definisi berikut.

Definisi 2.10 (Olsder dan Woude, 2004)

Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu (2.10) dan $x(t, x_0)$ adalah solusinya pada saat t dengan kondisi awal $x(0) = x_0$.

1. Vektor \vec{x} memenuhi $f(\vec{x}) = 0$ dikatakan sebagai titik ekuilibrium.

Contoh 2.8

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear (2.13) mempunyai tiga yaitu $(0,0)^T, (-2, -1)^T$, dan $(2, -1)^T$. Akan dicari matriks $J(f(\vec{x}))$ dengan $\vec{x}_1 = (0,0)^T, \vec{x}_2 = (-2, -1)^T$, dan $\vec{x}_3 = (2, -1)^T$. Kemudian akan diidentifikasi apakah masing-masing titik ekuilibrium tersebut hiperbolik atau non hiperbolik.

Penyelesaian :

Matriks *Jacobian* dari sistem (2.14) adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})^T = \begin{bmatrix} 1 + y & x \\ 2x & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks Jacobian untuk $\vec{x}_1 = (0,0)^T$

$$J(f(0,0)^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Akan dicari nilai eigen untuk $J(f(0,0)^T)$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)(4 - \lambda) = 0$$

Diperoleh dua nilai eigen, yaitu $\lambda = 1$ dan $\lambda = 4$. Dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $\vec{x}_1 = (0,0)^T$ adalah titik ekuilibrium hiperbolik karena tidak terdapat nilai eigen nol dibagian realnya. Kemudian, Matriks *Jacobian* untuk $\vec{x}_2 = (-2, -1)^T$ adalah

$$J(f(-2, -1)^T) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Akan dicari nilai eigen untuk $J(f(-2, -1)^T)$

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & -2 \\ -4 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

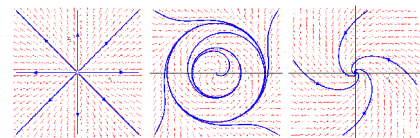
$$\Leftrightarrow \lambda(4 - \lambda) - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

20

2. Titik ekuilibrium \vec{x} dikatakan stabil jika diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \vec{x}\| < \delta$ (dengan $\|\cdot\|$ adalah norm pada \mathbb{R}^n) maka $\|x(t, x_0) - \vec{x}\| < \varepsilon$ untuk $t \geq 0$.
3. Titik ekuilibrium \vec{x} dikatakan stabil asimtotik jika titik-titik ekuilibriumnya stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - \vec{x}\| = 0$, asalkan $\|x_0 - \vec{x}\| < \delta_1$.
4. Titik ekuilibrium \vec{x} dikatakan tidak stabil jika titik ekuilibrium tidak memenuhi butir 2.

Berikut potret fase dari kestabilan titik ekuilibrium :



(a) Tidak Stabil (b) Stabil (c) Stabil Asimtotik

Gambar 2. 2 Potret Fase Kestabilan Titik Ekuilibrium

Matriks *Jacobian* $J(f(\vec{x}))$ dapat digunakan untuk untuk mengidentifikasi sifat kestabilan sistem nonlinear di sekitar titik ekuilibrium \vec{x} asalkan titik ekuilibrium sistem tersebut adalah titik ekuilibrium hiperbolik. Berikut diberikan teorema mengenai sifat kestabilan suatu sistem nonlinear yang ditinjau dari nilai eigen matriks *Jacobian* $(f(\vec{x}))$.

Teorema 2.1 (Olsder and Woude, 2004)

stabil.

Selanjutnya, diberikan pula teorema yang menyajikan sifat kestabilan suatu sistem $\dot{x} = Ax$ dengan nilai eigen y_1, y_2, \dots, y_k dimana ($k \leq n$).

Teorema 2.2 (Olsder and Woude, 2004)

Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{x} = Ax$, dengan A suatu matriks $n \times n$ yang mempunyai k nilai eigen berbeda y_1, y_2, \dots, y_k dengan ($k \leq n$).

1. Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika $\Re(y_i) < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.
2. Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan stabil jika dan hanya jika $\Re(y_i) \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$ dan jika setiap nilai eigen, imajiner dengan $\Re(y_i) = 0$, maka multiplisitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama.
3. Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika terdapat paling sedikit satu $\Re(y_i) > 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, k$.

Bukti:

1. Bukti ke kanan

Akan dibuktikan bahwa jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik, maka $\Re y_i < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.

23

Akan dibuktikan bahwa jika $\Re(y_i) \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$, maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil dan jika ada $\Re(y_i) = 0$, maka multiplisitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama.

$x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem persamaan diferensial, maka $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{\Re(y_i)t}$. Jika $\Re(y_i) < 0$, maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik (pasti stabil). Jika $\Re(y_i) = 0$, maka nilai eigen berupa bilangan kompleks murni. Multiplisitas aljabar berhubungan dengan nilai eigen sedangkan geometri berhubungan dengan vektor eigen (Luenberger dalam skripsi Widayati). Sehingga akan dibuktikan bahwa banyak nilai eigen dan vektor eigen adalah sama.

Tanpa mengurangi keumuman, diambil sembarang sistem pada \mathbb{R}^2 yang mempunyai nilai eigen bilangan kompleks murni.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ dengan } p > 0, q > 0 \quad (2.19)$$

Akan ditentukan nilai eigen dari sistem (2.19)

$$\begin{aligned}
 |A - yI| &= 0 \\
 \begin{bmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} &= 0 \\
 \begin{bmatrix} -y & -p \\ q & -y \end{bmatrix} &= 0
 \end{aligned}$$

Diperoleh persamaan karakteristik

$$y^2 + pq = 0 \quad (2.20)$$

Akar dari Persamaan (2.20) adalah

$$y_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4pq}}{2} = \frac{\pm 2i\sqrt{pq}}{2} = \pm i\sqrt{pq}$$

25

Berdasarkan definisi (2.10), titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$. Hal ini berarti bahwa untuk $t \rightarrow \infty$, $x(t, x_0)$ akan menuju $\bar{x} = 0$. Karena $x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem persamaan diferensial, maka $x(t, x_0)$ memuat $e^{\Re(y_i)t}$. Sehingga, agar $e^{\Re(y_i)t}$ menuju $\bar{x} = 0$, maka y haruslah bernilai negatif.

Bukti ke kiri

Akan dibuktikan bahwa jika $\Re(y_i) < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$, maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik.

$x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem persamaan diferensial, maka $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{\Re(y_i)t}$. Jika $\Re(y_i) < 0$, maka untuk $t \rightarrow \infty$, $x(t, x_0)$ akan menuju $\bar{x} = 0$. Sehingga, berdasarkan definisi (2.10), titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik.

2. Bukti ke kanan

Akan dibuktikan bahwa jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil, maka $\Re y_i \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$

Andaikan $\Re(y_i) > 0$, maka solusi persamaan diferensial $x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re(y_i)t}$ akan menuju ∞ (menjauh dari titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$) untuk $t \rightarrow \infty$, sehingga sistem tidak stabil. Hal ini sesuai dengan kontraposisi pernyataan jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil, maka $\Re y_i \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$. Jadi terbukti bahwa jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil, maka $\Re y_i \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.

Bukti ke kiri

$$y_1 = i\sqrt{pq} \text{ atau } y_2 = -i\sqrt{pq}$$

Vektor Eigen

Berdasarkan definisi, $y = (y_1, y_2)^T$ adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan y jika dan hanya jika y adalah pemecahan trivial dari

$$\begin{aligned}
 (A - yI)y &= 0 \\
 \begin{bmatrix} -y & -p \\ q & -y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Untuk $y_1 = i\sqrt{pq}$ maka Persamaan (2.21) menjadi

$$\begin{bmatrix} -i\sqrt{pq} & -p \\ q & -i\sqrt{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Matriks *augmented* dari sistem (2.22) yaitu

$$\begin{aligned}
 &\left[\begin{array}{cc|c} -i\sqrt{pq} & -p & 0 \\ q & -i\sqrt{pq} & 0 \end{array} \right] \text{ baris pertama dikali dengan } \left(\frac{1}{\sqrt{pq}} i\sqrt{pq} \right) \\
 &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{i}{q} \sqrt{pq} & 0 \\ q & -i\sqrt{pq} & 0 \end{array} \right] \text{ baris kedua dikali dengan } \left(\frac{1}{q} \right) \text{ kemudian dikurangi}
 \end{aligned}$$

dengan baris pertama

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{i}{q} \sqrt{pq} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

diperoleh

$$\begin{aligned}
 y_1 + \frac{i\sqrt{pq}}{q} y_2 &= 0 \\
 y_1 &= -\frac{i\sqrt{pq}}{q} y_2
 \end{aligned}$$

misal $y_2 = t$, maka $y_1 = -\frac{i\sqrt{pq}}{q} t$

26

3. Bukti ke kanan

Akan dibuktikan bahwa jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil, maka

$$\Re y_i > 0 \text{ untuk setiap } i = 1, 2, \dots, k.$$

Titik ekuilibrium tidak stabil, jika untuk $t \rightarrow \infty$ solusi persamaan differensial $x(t, x_0)$ akan menuju ∞ . Hal ini dapat terpenuhi jika $\Re y_i > 0$.

Bukti ke kiri

Akan dibuktikan bahwa jika $\Re y_i > 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$, maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil.

Diketahui bahwa jika $\Re y_i > 0$ maka solusi persamaan differensial $x(t, x_0)$ yang memuat $e^{\Re(y_i)t}$ akan menuju ∞ . Sehingga titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil.

Titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ dikatakan stabil asimtotik lokal jika semua nilai eigen matriks Jacobian mempunyai bagian real negatif. Sementara itu, titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ dikatakan stabil asimtotik global jika untuk sebarang nilai awal $x(t_0)$ yang diberikan, solusi sistem (2.8) $x(t)$ berada dekat dengan titik ekuilibrium dengan titik ekuilibrium \bar{x} dan untuk t membesar menuju tak hingga, $x(t)$ konvergen ke titik ekuilibrium \bar{x} .

Misalkan terdapat n kelas terinfeksi dan m kelas tidak terinfeksi. Selanjutnya dimisalkan pula x menyatakan subpopulasi kelas terinfeksi dan y menyatakan subpopulasi kelas tidak terinfeksi (rentan dan atau sembuh), dan $x \in \mathbb{R}^n$, dan $y \in \mathbb{R}^m$, untuk $m, n \in \mathbb{N}$, sehingga

$$\dot{x} = \varphi_i(x, y) - \psi_i(x, y), \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\dot{y} = \eta_j(x, y), \text{ dengan } j = 1, 2, \dots, m$$

dengan ϕ_i adalah laju infeksi sekunder yang menambah pada kelas terinfeksi dan ψ_i adalah laju perkembangan penyakit, kematian, dan atau kesembuhan yang mengakibatkan berkurangnya populasi dari kelas terinfeksi.

Penghitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) berdasarkan linearisasi dari sistem persamaan diferensial yang didekati pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Persamaan kompartemen terinfeksi yang telah dlinearisasi dapat dituliskan sebagai berikut

$$\dot{x} = (F - V)x \quad (2.24)$$

dengan F, V : matriks berukuran $n \times n$,
 $F = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$

$$V = \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(0, y_0).$$

Selanjutnya didefinisikan matriks K sebagai

$$K = FV^{-1}$$

dengan K disebut sebagai *next generation matrix*. Nilai harapan dari infeksi sekunder pada populasi rentan adalah radius spektral (nilai eigen dominan) dari matriks K (Driesse dan Watmough, 2001) sehingga

Contoh 2.9 Diberikan sistem (2.14). Akan diselidiki tipe kestabilan dari sistem (2.14) disekitar titik ekuilibrium \bar{x} .

Berdasarkan analisa pada Contoh 2.8 diperoleh 3 titik ekuilibrium $\bar{x} = \bar{x}_1, \bar{x}_2$, dan \bar{x}_3 merupakan titik ekuilibrium hiperbolik. sehingga perilaku kestabilan sistem linear di sekitar titik ekuilibrium \bar{x} sama dengan perilaku sistem nonlinearnya yaitu tidak stabil karena terdapat bagian real dari nilai eigen matriks Jacobian $J(f(\bar{x})^T)$ bernilai positif.

H. Radius Spektral

Definisi 2.11 (Rahayu, 2005)

Diberikan A adalah matriks $n \times n$ dan y_1, y_2, \dots, y_n adalah nilai eigen dari matriks A maka radius spektral dari matriks A didefinisikan sebagai

$$\rho(A) = \max_{i=1,2,\dots,n} \{|y_i|\} \quad (2.23)$$

I. Bilangan Reproduksi Dasar

Suatu model biasanya memiliki parameter *threshold* yang dikenal sebagai bilangan reproduksi dasar (R_0), sedemikian sehingga jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil simtotik lokal dan penyakit tidak menyerang populasi, namun jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit tidak stabil dan penyakit sangat mungkin untuk menyebar (Driessche dan Watmough, 2001). Secara istilah, penyakit memiliki definisi yang lebih luas dari definisi klinis yaitu mencakup tahap asimtomatik infeksi serta gejala artinya bahwa yang dimaksud individu yang terinfeksi adalah individu yang terkena penyakit dengan menunjukkan gejala maupun yang tidak menunjukkna gejala (Widayati, 2013).

$$R_0 = \rho(K) = \rho(FV^{-1})$$

Contoh 2.10 Diberikan sistem persamaan diferensial berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \alpha - \beta S(t)I(t) - \mu(S) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu(I(t)) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) - \mu(R(t)) \end{aligned} \quad (2.25)$$

dengan

$S(t)$: populasi individu rentan pada saat t

$I(t)$: populasi individu terinfeksi pada saat t

$R(t)$: populasi individu sembuh dari infeksi pada saat t

Sistem (2.25) mempunyai titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (1, 0, 0)$.

Next generation matrix dapat diperoleh dari kelas I , sehingga kelas I dapat dituliskan sebagai berikut :

$$I(t) = \varphi((S, R), I) - \psi((S, R), I) \quad (2.26)$$

dengan $\varphi = [\beta S(t)I(t)]$

$$\psi = [\gamma I(t) + \mu I(t)]$$

Maka hasil linearisasi dari φ dan ψ masing-masing adalah $F = [\beta S(t)]$ dan $V = [\gamma + \mu]$. Sehingga diperoleh *Next generation matrix* berikut

$$K = FV^{-1} = [\beta S(t)] \left[\frac{1}{\gamma + \mu} \right] = \frac{\beta S(t)}{\gamma + \mu} \quad (2.27)$$

Selanjutnya substitusikan nilai titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (1, 0, 0)$ ke Persamaan (2.27) diperoleh



PDF Complete

Your complimentary
use period has ended.
Thank you for using
PDF Complete.

Click Here to upgrade to
Unlimited Pages and Expanded Features

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard. (2010). *Elementary Linear Algebra : Applications Versions*. 10th Ed. Book. John Wiley & Sons, Inc.
- Aparicio, Juan Pablo. (2009). Mathematical Modelling of Tuberculosis Epidemics. *Mathematical BioSciences and Engineering*. 6(II). Hlm. 209-237.
- Callahan, James. (2008). *Calculus in Context: The Five College Calculus Project*. Five Colleges Inc.
- Candrawati, Lidyana. (2014). Model Matematika SACR Penyebaran Virus Hepatitis C pada pengguna Narkoba Suntik. *Skripsi*. UNY. Yogyakarta,
- Castillo, Carlos, & Chavez. (2004). Dynamical Models of Tuberculosis and Their Applications. *Mathematical Biosciences and Engineering*. 1(II). Hlm. 361-404.
- Dym, C. L. & E. S. Ivey. (1980). *Principles of Mathematical Modeling*. New York: Academic Press.
- Driessche & Watmough. (2001). Reproduction Number and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*. 180. Hlm. 29-48.
- Egbetade, S.A. (2013). On Existence of A Vaccination Model of Tuberculosis Disease Pandemic. Research Inventory: *International Journal of Engineering and Science*. 2(VII). Hlm. 41-44.

- Fredlina, K. Queena, Oka, Bagus Tjokroda & I Made Eka Dwipayana. Model SIR (*Susceptible, Infectious, Recovered*) untuk Penyebaran Penyakit *Tuberculosis*. *E-Journal Matematika*. 1(I). Hlm 52-58.
- Goutelle, Sylvain. (2011). Mathematical Modeling Of Pulmonary Tuberculosis Therapy: Insights From A Prototype Model With Rifampin. *Journal of Theoretical Biology*.
- Ibrahim, M.O. (2013). A Mathematical Model for the Epidemiology of Tuberculosis with Estimate of the Basic Reproduction Number. *IOSR Journal of Mathematics*. 5(V). Hlm. 46-52.
- Idianto, Prihandono, Bayu & Nilamsari Kusumastuti. (2013). Analisis Kestabilan Lokal Model Dinamika Penularan Tuberculosis Satu Strain dengan Terapi dan Efektivitas Chemoprophylaxis. *Buletin Ilmiah Matematika, Statistika, dan Terapannya (Bimaster)*. 2(III). Hlm 173-182.
- Nainggolan, Jonner. (2012). Kontrol Optimal Vaksinasi Model Epidemiologi Tipe SIR. *Prosiding. Semnas Matematika dan Pend. Matematika*. MIPA UNY.
- Nugroho, Susilo. (2009). Pengaruh Vaksinasi terhadap Penyebaran Penyakit dengan Model Edemi SIR. *Skripsi*. UNS. Surakarta.
- Olster, G.J. & J. W. Van Der Woude. (2004). *Mathematical Sistem Theory*. Netherland : VVSD.
- Prihutami, Lisa. (2009). Analisis Kestabilan Model Penyebaran Penyakit *Tuberculosis*. *Skripsi*. UNDIP. Semarang.

- Ross, Shepley L. (2010). *Differential Equations*. Delhi: Rajv Book Binding House.
- Sari, Eminugroho Ratna. (2010). Syarat Cukup untuk Meminimalkan Penyebaran Penyakit Tuberculosis pada Suatu Komunitas. *Prosiding, Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*. FMIPA. UNY.
- Setiawan. (2012). Kontrol Optimal Penyebaran *Tuberculosis* dengan *Exogenous Reinfection*. Tesis. Universitas Indonesia. Depok.
- Verhulst, Ferdinand. (1990). *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag.
- Wiggins, Stephen. (2003). *Introduction to Applied NonLinear Dynamical Sistem and Chaos*. Springer.